COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 19 SEPTEMBRE 1887.

PRÉSIDÉE PAR M. HERVÉ MANGON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **J. Bertrand**, en offrant à l'Académie le Livre dans lequel il a résumé ses leçons sur la Thermodynamique, présente quelques remarques relatives à la fonction désignée longtemps par les physiciens sous le nom de *fonction de Carnot*.

« Sadi Carnot a affirmé, c'est là sa grande découverte, que le rendement d'une machine thermique parfaite est indépendant de la nature du corps dont les dilatations produisent le travail; il dépend seulement des températures extrêmes T_1 et T_2. Il n'a pas cherché à trouver la fonction.

» Clapeyron, l'habile et savant commentateur de Carnot, a accepté tous les principes du maître; mais, en considérant des cycles infiniment petits, il réduisait la fonction inconnue à ne contenir qu'une variable.

» On peut se demander comment la découverte de cette fonction a été si tardive.

» Elle est la même pour tous les corps. Comment Carnot et Clapeyron n'ont-il pas eu l'idée de la chercher pour les gaz parfaits dont les propriétés rendent le calcul facile?

» Le calcul, pour eux, était moins facile que pour nous. Le gaz parfait, qui satisfait aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et dont les caloriques spécifiques sont constants, ne pouvait exister d'après leurs principes.

» Le calorique spécifique, Carnot l'avait démontré, doit croître proportionnellement au logarithme du volume.

» Les principes admis par Carnot et par Clapeyron, et ceux que tous les physiciens acceptent aujourd'hui, sont contradictoires.

» Quand un corps parcourt un cycle, suivant Carnot, il a reçu, en revenant à son état primitif, autant de chaleur qu'il en a cédé.

» La différence, suivant la théorie incontestée de Mayer, n'est pas égale à zéro, mais proportionnelle au travail accompli, c'est-à-dire à la surface du quadrilatère qui, suivant l'ingénieuse convention de Clapeyron, représente le cycle.

» Comment se fait-il que les résultats obtenus comme conséquence d'un principe ne soient pas démentis par le principe contraire?

» La raison, quoique fort simple, n'a jamais, je crois, été signalée.

» Clapeyron ne considère que des cycles infiniment petits. Or, dans ce cas, leur surface est infiniment petite du second ordre; elle est négligeable, et, comme c'est elle qui fait toute la différence, les deux théories coïncident.

» J'ai cherché, dans le cas général, la forme que Carnot et Clapeyron auraient dû donner, d'après leurs principes, à cette fonction inconnue, que, fort heureusement, ils n'ont pas cherchée.

» On peut montrer tout d'abord que, dans l'hypothèse de l'indestructibilité du calorique, la fonction $F(T_1, T_2)$, qui figure dans l'énoncé du théorème de Carnot, doit se réduire à la différence de deux fonctions d'une seule variable chacune et être de la forme

$$F(T_1, T_2) = \varphi(T_1) - \varphi(T_2).$$

» Reprenons, pour le démontrer, l'énoncé du théorème :

» Si la suite des états du corps est représentée par le contour d'un cycle formé par deux lignes isothermes et par deux lignes adiabatiques, le travail accompli étant désigné par G, et Q désignant la quantité de chaleur *mise en œuvre*, on a

$$G = QF(T_1, T_2),$$

Q désignant à la fois la quantité de chaleur versée par la source la plus chaude, dont la température est T_1, et celle que reçoit la source la plus froide, de température T_2. Pour Clapeyron, comme pour Carnot, ces deux quantités de chaleur, dont la différence joue aujourd'hui un rôle important dans nos théorèmes, ne pouvaient manquer d'être égales. Sans accepter l'hypothèse, il est intéressant d'en étudier les conséquences.

» Associons deux cycles de Carnot, dont le second ait pour source chaude la source froide du premier, l'un de ces cycles versant la chaleur empruntée à la température T_1 sur une source de température T_2, le second prenant cette chaleur à la source de température T_2 pour la verser sur une source de température T_3.

» Les deux cycles équivalent, par leur réunion, à un cycle unique; car la suppression du côté isotherme commun, parcouru deux fois dans des sens différents, est sans influence sur le travail aussi bien que sur la chaleur dépensée et reçue.

» Le travail produit par le premier cycle est, d'après le théorème de Carnot,

$$G_1 = Q_1 F(T_1, T_2);$$

par le parcours du second, le travail produit est

$$G_1 = Q_1 F(T_2, T_3).$$

» Le facteur Q_1 reste le même, parce que, conformément aux idées de Carnot, les mêmes quantités de chaleur sont données et reçues dans le parcours des côtés isothermes d'un même cycle.

» L'application du même théorème au cycle total donnera

$$G_3 = Q_1 F(T_1, T_3),$$

G_3 étant le travail, évidemment égal à $G_1 + G_2$, qui correspond au cycle total. Q_1 conserve toujours la même valeur. On doit donc avoir

$$F(T_1, T_3) = F(T_1, T_2) + F(T_2, T_3);$$

T_1, T_2, T_3 sont trois températures choisies arbitrairement. Le second membre de l'équation, considéré comme une fonction des valeurs T_1 et T_3, est de la forme

$$\varphi(T_1) + \psi(T_3).$$

Il doit donc en être de même du premier, et la fonction F est la somme de

deux fonctions d'une seule variable. En introduisant ce résultat dans les divers termes de l'équation, elle devient

$$\varphi(T_1) + \psi(T_3) = \varphi(T_1) + \psi(T_2) + \varphi(T_2) + \psi(T_3).$$

T_2, ne figurant pas dans le premier membre, doit disparaître du second, et l'on doit avoir

$$\psi(T_2) + \varphi(T_2) = \text{const.}$$

» Les deux fonctions φ et ψ sont donc égales et de signes contraires, à une constante près. G devant évidemment s'annuler lorsque T_1 est égal à T_2, la constante est nulle, et le théorème de Carnot doit être exprimé, d'après les principes de son inventeur, par une équation de la forme

$$G = Q[\varphi(T_1) - \varphi(T_2)].$$

» Pour chercher la forme de la fonction φ, il suffit de faire pour un corps, quel qu'il soit, l'étude du cycle. La fonction est la même pour tous les corps : c'est cette généralité qui fait l'importance du théorème.

» L'étude des gaz, déjà complète au temps de Carnot, et les résultats mêmes obtenus par lui comme déduction de ses principes, lui permettaient de faire, s'il en avait eu la pensée, le calcul de la chaleur dépensée et celui du travail produit quand le cycle est parcouru par un gaz vérifiant en toute rigueur les lois de Gay-Lussac et de Mariotte. Carnot ne pouvait pas y associer l'hypothèse d'un calorique spécifique constant. Il avait *démontré* que le calorique spécifique à volume constant k doit avoir pour expression

$$k = f(T) + C\,lv, \tag{1}$$

la constante C étant la différence $k' - k$ des caloriques spécifiques.

» Soit $A_1 A_2 A_3 A_4$ le cycle de Carnot parcouru par le gaz; la chaleur dépensée pour un changement infiniment petit a pour expression

$$dQ = k\,dt + \frac{k' - k}{R} p\,dv. \tag{2}$$

» Pour le côté isotherme $A_1 A_2$, on a $dt = 0$; $k' - k$ étant égal à C, on peut écrire

$$dQ = \frac{C}{R} p\,dv$$

et, à cause de l'équation $pv = RT$,

$$dQ = CT\frac{dv}{v}.$$

» T étant constant et égal à T_1, si l'on nomme v_1 et v_2 les volumes qui correspondent aux extrémités A_1 et A_2 du côté considéré, on aura

$$Q_1 = CT_1 l\frac{v_2}{v_1};$$

Q_1 est le dénominateur de la fraction $\frac{G}{Q_1}$, égale à la fonction inconnue $F(T_1, T_2)$.

» Le numérateur G, travail produit dans le parcours du cycle, est représenté par l'intégrale $\int p\,dv$, prise sur le contour entier. Pour calculer cette intégrale, considérons l'équation

$$dQ = k\,dt + \frac{Cp\,dv}{R},$$

équivalente à l'équation (2), puisque $k' - k = C$.

» Intégrons les deux membres sur le contour entier du cycle : on aura, *d'après les principes acceptés par Carnot,*

$$\int dQ = 0.$$

Nous pouvons donc écrire, pour le contour entier,

$$\frac{C}{R}\int p\,dv = -\int k\,dt$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$\frac{C}{R}\int p\,dv = -\int f(T)\,dt - C\int dt\,lv.$$

» Quelle que soit la fonction $f(T)$, l'intégrale $\int f(T)\,dt$ est nulle, puisque, le cycle étant fermé, la valeur initiale de la température est égale à la valeur finale. L'équation se réduit à

$$\frac{1}{R}\int p\,dv = -\int dt\,lv.$$

» Il suffit donc, pour connaître $\int p\,dv$, de calculer l'intégrale $\int dt\,lv$, successivement sur les quatre côtés du quadrilatère.

» Sur les côtés isothermes, elle est nulle, puisque l'on a $dt = 0$; il suffit de faire le calcul pour les lignes adiabatiques.

» Pour chacune de ces lignes, on a, par définition,

$$dQ = 0;$$

par conséquent,

$$k\,dt + \frac{C}{R}p\,dv = 0.$$

» En remplaçant k par sa valeur (1) et p par $\frac{RT}{v}$, cette équation devient

$$f(T)\,dt + C\,lv\,dt + CT\frac{dv}{v} = 0;$$

on peut lui donner la forme

$$f(T) + C\,lv + CT\frac{d\,lv}{dt} = 0;$$

elle a pour intégrale, en y considérant lv comme inconnue,

$$(3)\qquad lv = \frac{C_1}{T} + F(T),$$

C_1 désignant une constante et $F(T)$ une fonction liée à $f(T)$ par l'équation

$$f(T) + C\,F(T) + CT\,F'(T) = 0.$$

» On a

$$\int lv\,dt = C_1\,lT + \int F(T)\,dt.$$

» Soit $F_1(T)$ l'intégrale indéfinie de $F(T)$, les valeurs extrêmes de T dans le parcours de l'une des lignes adiabatiques étant T_1 et T_2; on aura, pour la première de ces lignes,

$$\int dt\,lv = C_1\,l\frac{T_2}{T_1} + F_1(T_2) - F_1(T_1),$$

et, pour la seconde, la constante C_1 changeant de valeur et devenant C'_1,

$$\int dt\,lv = C'_1\,l\frac{T_1}{T_2} + F_1(T_1) - F_1(T_2).$$

» En ajoutant ces deux équations, on obtient la valeur de $\frac{1}{R}\int p\,dv$ étendue au contour entier, égale et de signe contraire à la somme des va-

leurs de $\int dt\, lv$,

$$\frac{1}{R}\int p\, dv = (C_1 - C'_1)\, l\frac{T_1}{T_2}.$$

» L'équation (3) des lignes adiabatiques donne

$$lv_2 = \frac{C_1}{T_1} + F(T_1),$$

$$lv_1 = \frac{C'_1}{T_1} + F(T_1);$$

par conséquent,

$$C_1 - C'_1 = T_1\, l\frac{v_2}{v_1}.$$

On a donc

$$\frac{1}{R}\int p\, dv = T_1\, l\frac{v_2}{v_1}\, l\frac{T_1}{T_2};$$

$\int p\, dv$ est le travail désigné par G; en le divisant par Q_1, calculé d'abord, on a

$$\frac{G}{Q_1} = F(T_1, T_2) = \frac{R}{C}(lT_1 - lT_2).$$

» Cette forme de la fonction, rigoureusement déduite des principes de Carnot, est très différente de celle que les progrès de la Science ont fait accepter. »

MÉMOIRES LUS.

AGRONOMIE. — *Observations sur les assolements.* Note de M. **P.-P. Dehérain.**

« J'ai déjà eu l'honneur d'entretenir l'Académie des avantages que procurent, dans la culture du blé et des betteraves, le choix judicieux des variétés et l'emploi des engrais ; ils ne déterminent pas seuls cependant l'abondance des récoltes : elle est liée encore, et très étroitement, à la bonne préparation du sol, que l'assolement adopté rend aisée ou difficile.

» La rotation généralement adoptée dans le nord de la France dure cinq ans; elle s'ouvre par une plante sarclée, betteraves ou pommes de terre, auxquelles succède un premier blé, qui occupe le sol la deuxième année ; au printemps, on y sème du trèfle, on en tire deux coupes la troisième année ;

rompu à l'automne, il fait place au second blé, après lequel arrive une avoine pendant la cinquième et dernière année.

» Dans cette rotation, deux récoltes sont mal placées; le premier blé succède mal aux betteraves; l'avoine, au second blé. C'est ce qui résulte des nombreuses observations qui ont été recueillies à Grignon depuis de longues années.

» Voici, en effet, les résultats obtenus dans la culture de diverses variétés de blé, suivant qu'elles succèdent à des betteraves ou bien, au contraire, à des trèfles ou des maïs :

Quintaux métriques de grains recueillis à l'hectare.

Blé de Bordeaux	après betteraves	26
	après trèfle	35
Blé Browick	après betteraves	28
	après maïs	37
Blé rouge d'Écosse	après betteraves	30
	après maïs	40
Blé à épi carré Scholey	après betteraves	29,5
	après maïs	40,5

» Enfin, cette année 1887, nous avons obtenu à Wardrecques, M. Porion et moi :

Blé à épi carré Porion	après betteraves	46,0
	après trèfle	53,8

Cette récolte, obtenue sur 70 ares, est la plus forte que nous ayons encore constatée.

» Les différences précédentes sont considérables; il est facile de concevoir à quelles causes elles sont dues; depuis que Boussingault a montré l'efficacité des nitrates dans l'alimentation végétale, depuis que MM. Schlœsing et Müntz nous ont enseigné que ces nitrates sont produits par l'activité d'un ferment aérobie, qui ne fonctionne que dans un sol aéré et humide, nous comprenons quelle importance présente une pulvérisation, un émiettement du sol, qui assure partout la pénétration de l'air, la conservation de l'humidité. Cet émiettement, qu'on peut comparer à la préparation d'un milieu de culture pour le ferment nitrique, ne peut être obtenu que par un travail soigné, souvent impossible à exécuter quand le blé succède à la betterave.

» Si l'automne est humide, l'arrachage des racines est pénible; il laisse le sol retourné par les fourches, piétiné par les chevaux, écrasé par les chariots, dans un état déplorable; il faut cependant labourer hâtivement et procéder aux semailles du blé d'automne; elles se font dans de mauvaises conditions et la récolte s'en ressent. La désastreuse récolte de blé de 1879, qui n'a donné que 79 millions d'hectolitres de blé, a suivi l'automne pluvieux de 1878.

» Dans l'assolement quinquennal, l'avoine arrive après le second blé, la cinquième année, sur une terre déjà fatiguée par les récoltes précédentes; à ce point de vue, sa place est bien choisie, car l'avoine est peu exigeante. De 1875 à 1879, on a récolté, en moyenne, au champ d'expériences de Grignon, 21 quintaux de grains à l'hectare sur les parcelles qui ont reçu du fumier, 22 quintaux sur celles qui ont eu du nitrate de soude et des superphosphates, et 19 quand l'avoine a été cultivée sans engrais. Les différences sont minimes; mais, si l'avoine ne demande que peu d'engrais, elle ne donne de bonnes récoltes que dans un sol bien dépouillé de plantes adventices, contre lesquelles elle se défend mal.

» J'ai pratiqué, au champ d'expériences de Grignon, la culture continue de l'avoine, de 1875 à 1882; en 1876, année favorable, le sol étant encore propre, l'avoine de Brie a donné $29^{qm},54$ de grains à l'hectare; en 1881, sur un sol envahi par les mauvaises herbes, $14^{qm},17$; et en 1882, $11^{qm},59$. Il a suffi de changer l'avoine de place, pour qu'en 1883 elle remontât à 29^{qm}.

» La condition de réussite de l'avoine est donc de trouver un sol bien dépouillé de plantes adventices; or, cette condition est mal remplie quand elle succède au blé, qui est lui-même facilement envahi et qui, par suite, laisse le sol dans un état fâcheux.

» Quand on pratique l'assolement de quatre ans, en usage en Angleterre et désigné sous le nom de *rotation du Norfolk,* tous ces inconvénients disparaissent; je l'ai mis en pratique à Grignon avec avantage.

» Aux betteraves arrachées tardivement, succède l'avoine semée seulement au printemps, sur une terre bien préparée et dépouillée l'année précédente des plantes adventices, par les sarclages qu'exige la betterave.

» Le blé succède au trèfle, qui occupe le sol la troisième année, mais le laisse libre dès le commencement de l'automne; le travail du sol peut donc être assez soigné pour assurer la récolte.

» Après les betteraves, l'avoine donne de bonnes récoltes, sans qu'il soit

nécessaire de lui distribuer aucune fumure; en 1866, on a obtenu les rendements suivants :

	qx
Avoine jaune de Flandre...........	37,0
» de Pologne................	29,5
» de Californie..............	31,0
» de Coulommiers...........	32,5
» géante à grappes..........	40,0

» Cette dernière variété, qui est due à M. H. de Vilmorin, est très prolifique ; mais, pendant les années humides, elle acquiert de telles dimensions qu'elle est exposée à la verse.

» En 1887, on a recueilli, en moyenne, à l'hectare :

	qx
Avoine géante....................	39,3
» des salines................	36,5

» Très répandue dans la région septentrionale, l'avoine des salines me paraît devoir se répandre avantageusement dans les parties de la France où elle est encore peu cultivée.

» En résumé, l'assolement de quatre ans, usité en Angleterre et parfois en France, me paraît devoir être étendu :

» 1° Parce qu'en plaçant l'avoine, culture du printemps, en seconde année après les betteraves, on est certain, quelque tardif que soit l'arrachage, de pouvoir préparer, avec tous les soins nécessaires, le sol déjà débarrassé des mauvaises herbes par les sarclages pratiqués sur la betterave; ces conditions sont suffisantes pour assurer la réussite de l'avoine, peu avide d'engrais.

» 2° Parce qu'en semant le blé après le trèfle, qui laisse le sol libre dès le commencement de l'automne, tous les travaux qui précèdent les semailles du blé sont exécutés aisément. »

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, un Volume rédigé par M. *Banaré*, et publié par le Service hydrographique, sous le titre « Océan indien : instructions générales; vents, courants et routes principales de navigation ». (Présenté par M. Bouquet de la Grye.)

ASTRONOMIE. — *Éléments provisoires de la nouvelle comète Brooks* (24 *août*). Note de MM. **Rambaud** et **Sy**, présentée par M. Mouchez.

« Ces éléments sont fondés sur les observations faites à l'observatoire d'Alger, aux dates suivantes : 29 août, 31 août, et 2 septembre.

Éléments.

$$T = 1887, \text{ oct. } 13{,}9499$$

$$\begin{aligned} \pi &= 157^\circ.54{,}5 \\ \Omega &= 85.39{,}8 \\ i &= 45.58{,}1 \\ \log q &= 0{,}05717 \end{aligned}$$

» Représentation de l'observation moyenne O — C :

$$\Delta\alpha \cos\beta = +0'',2, \qquad \Delta\beta = 0'',0.$$

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète Brooks* (1887, *août* 24), *faites à l'équatorial de* 6 *pouces* (*Brunner*) *de l'observatoire de Lyon;* par M. **Le Cadet**. (Présentées par M. Mouchez.)

Dates. 1887.	Temps moyen de Lyon.	Δα.	Δδ.	Nombre de compar.	α appar.	Log. fact. parall.	δ appar.	Log. fact. parall.
	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″	
Sept. 9...	15.46.49	+0.39,36	+6.20,3	15:10	9.41.45,03	$9{,}673_n$	+30.13. 1,5	0,777
10...	15.48.10	−0.19,71	+2.47,2	20:15	9.46.29,86	$9{,}673_n$	+30.12.16,3	0,776

Positions de l'étoile de comparaison.

Grandeur.	α moy. 1887,0.	Réduction au jour.	δ moy. 1887,0.	Réduction au jour.	Autorité.
	h m s	s	° ′ ″	″	
8	9.41. 5,50	+0,07	+30.6.48,9	− 7,7	Weisse (828 — IX[h])
9,1	9.46.48,89	+0,68	+30.9.41,6	−12,5	Argelander (1927 z + 30°)

ASTRONOMIE. — *Sur l'organisation des services astronomiques aux États-Unis.* Note de M. A. **Laussedat.** (Extrait.)

« Les grands observatoires de Washington, de Cambridge (Massachusetts) et de Lick (Californie) [1] sont bien connus de tous les astronomes; il en est de même des travaux qui ont été exécutés là ou dans quelques observatoires privés et qui ont illustré ou fait connaître honorablement les noms de Gould, Bond, Walker, Coffin, Hubbard, H. Draper, Rutherfurd, Common, Simon Newcomb, Michelson, Pickering, Asaph Hall, Harkness, W.-A. Rogers, E. Holden, Davidson, A. Brown, Winlock, Winterhalter, etc., et celui de notre compatriote M. Trouvelot.

» On sait que l'Astronomie physique est particulièrement cultivée en Amérique, et qu'on y voit les instruments les plus puissants et les plus perfectionnés construits par des artistes d'un grand mérite, en tête desquels il faut citer MM. Alvan Clark père et fils pour l'Optique et la Mécanique, et M. Negus pour la Chronométrie. Il me serait impossible de rappeler, même succinctement, les remarquables découvertes accomplies, depuis moins d'un demi-siècle, par les astronomes américains, les admirables résultats qu'ils ont obtenus à l'aide de la Photographie, et d'indiquer les recherches délicates qu'ils poursuivent dans le domaine de la Spectroscopie et dans celui de la Photométrie.

» Ce n'est pas sans une émotion dont je ne crois pas avoir à me défendre que, grâce à la délicate attention de M. Simon Newcomb et des officiers attachés à l'observatoire naval de Washington, je me suis trouvé inopinément en présence du *photohéliographe horizontal* qui a servi à ces observations en 1874 et en 1882 pour la détermination de la parallaxe solaire par les observations des passages de Vénus [2]. « Voilà votre enfant », me dit M. Newcomb en arrivant auprès de cet instrument, qui

---

[1] Ce dernier observatoire est une fondation de feu M. Lick, qui y a consacré une somme de 700 000 dollars (3 600 000^{fr}).

[2] La description du photohéliographe, la manière de le mettre en station et la méthode à employer pour trouver la relation qui existe entre les positions apparentes de Vénus et du Soleil sur la sphère céleste et les positions de leurs images sur les photographies se trouvent dans l'Ouvrage intitulé : *Observations of the transit of Venus, december* 8-9, 1874; edited by Simon Newcomb, secretary of the Commission. Washington, 1880.

est en effet la reproduction exacte, seulement à une plus grande échelle, de celui que j'ai imaginé en 1860 et que nous avons employé, M. A. Girard et moi, à l'observation de l'éclipse totale du 18 juillet, à Batna, et, une seconde fois, à Salerne (Italie), en 1867 [1]. Ce n'est pas d'ailleurs la seule méthode française qui ait servi, en Amérique, à la détermination de la parallaxe solaire. Cet élément a été déduit, d'un autre côté, par MM. Simon Newcomb et Albert-A. Michelson, de la vitesse de la lumière mesurée à l'aide d'un appareil à miroir tournant très savamment construit et en se servant d'une base de $3721^{m},21$, distance du fort Myer au pied du monument de Washington [2].

» Les applications utiles ne sont pas perdues de vue et l'étude de la marche des chronomètres aux diverses températures et la transmission de l'heure dans les ports constituent, à l'observatoire de Washington surtout, le service qui est considéré comme le plus important.

» J'ai visité la nouvelle chambre dite *des températures*, où sont éprouvés les chronomètres, et la salle des appareils télégraphiques pour la transmission de l'heure, et j'ai assisté, à midi, à cette opération. L'impression que l'on garde de l'ensemble de ces installations est que le double but du service important qui y est organisé est parfaitement atteint.

» *Étude des chronomètres*. — On trouve dans une publication récente du commandant Allan-D. Brown [3], superintendent de ce service, les détails de construction de la chambre d'observation, et du régulateur au moyen duquel on y entretient la température voulue, pendant une semaine, à un quart de degré Fahrenheit près. Les chronomètres sont rangés dans trois classes : pour la première, les épreuves sont faites entre 32° F. (0° C.) et 120° F. (48°,84 C.); pour la deuxième, entre 45° F. (7°,22 C.) et 90° F. (32°,22 C.); la troisième classe comprend les chronomètres spécialement destinés aux expéditions polaires et on les éprouve au-dessous de 0° C. Pendant les années de 1884 à 1886, cinquante-quatre chronomètres, tous construits par des horlogers américains, ont été expérimentés, et les observa-

---

(1) M. le professeur Winlock a imaginé indépendamment et proposé plus tard le même instrument pour l'observation des passages de Vénus.

(2) *Astronomical papers prepared for the use of the american Ephemeris and nautical Almanac;* vol. II, parts III and IV. *Velocity of light in air and refracting media.* Washington, 1885.

(3) *The observatory temperature room and competitive trials of chronometers in* 1884 *and* 1886. Washington, 1886.

tions, discutées avec le plus grand soin par le lieutenant Pendleton, ont démontré que l'horlogerie de haute précision avait fait de grands progrès, depuis quelques années, aux États-Unis. Le nombre des maisons qui ont concouru s'est élevé à dix; le prix des chronomètres reconnus admissibles pour le service de la marine est moyennement de 300 à 350 dollars (1500 à 1750^{fr}) et s'élève, pour les chronomètres exceptionnels, de 400 à 450 dollars (2000 à 2250^{fr}).

» Je crois encore devoir ajouter qu'on ne se contente pas, à l'observatoire naval, d'observer la marche des chronomètres en faisant varier la température; on fait aussi varier le degré d'humidité de l'enceinte en y tendant des toiles imprégnées d'eau et de chlorure de calcium en diverses proportions. On ne paraît pas, d'ailleurs, avoir trouvé de loi précise pour la marche des chronomètres, selon l'état hygrométrique. Chaque instrument a son tempérament spécial, révélé par le bulletin de marche qui l'accompagne.

» *Transmission de l'heure.* — L'heure de Washington est transmise, tous les jours, aux principaux ports de l'Atlantique. Depuis trois minutes avant midi jusqu'au coup de midi, l'heure est transmise, seconde par seconde, à l'exception de celle qui marque chaque demi-minute et des cinq secondes qui précèdent la minute entière.

» L'importance de ce service est si bien apprécié que les deux compagnies télégraphiques de *Western Union* et de *Baltimore and Ohio* suspendent le leur et prêtent, sans indemnité, leurs fils pendant les trois minutes nécessaires, bien que ce soit le moment du jour où le public en a le plus grand besoin. L'observatoire naval devient, pendant ce temps, une station des deux compagnies.

» Partout où le service est installé, un électro-aimant répète le son déterminé par le passage du courant, à chaque battement produit dans la salle de distribution de Washington.

» A midi précis, le courant fait tomber des balles dans les stations suivantes : Nouvelle-Orléans, Savannah, Washington (deux balles), Philadelphie, New-York, Newport, Wood's Holl (Mass.); Boston est desservi directement par l'observatoire de Cambridge, les ports du Pacifique le sont par une succursale de l'observatoire naval, située à Mare Island (Calif.), à 28 milles (45^{km}) de San-Francisco.

» Tous les ans, on installe des balles dans de nouvelles stations, partout d'ailleurs où les marins les réclament.

» Le même courant corrige, à midi, les trois cents à quatre cents hor-

loges répandues dans les écoles, les ministères, les établissements publics de Washington. Son effet est de ramener les trois aiguilles de chacune de ces horloges au zéro ($0^h 0^m 0^s$).

» Certains services importants, celui des pompiers, le *Signal Office* et le *Coast Survey* ont des lignes télégraphiques directes qui les unissent à l'observatoire naval, et peuvent réclamer l'heure toutes les fois qu'ils en ont besoin. Enfin, les particuliers obtiennent également l'heure en s'abonnant avec la Compagnie des Télégraphes. Nombre de manufacturiers, et en particulier tous les horlogers, sont abonnés.

» Les grands observatoires dont j'ai parlé en commençant ne sont pas les seuls que l'on rencontre en Amérique : il y en a dans toutes les universités, dans les collèges, dans les écoles d'ingénieurs. Chez ce peuple qui voyage tant et qui a tant à explorer dans son propre pays, les notions et jusqu'aux méthodes astronomiques élémentaires sont devenues en quelque sorte familières. Un fait très caractéristique suffira pour justifier ce que j'avance. Ne sait-on pas que les méridiens et les parallèles ou les perpendiculaires servent à délimiter non seulement certains États, mais même les parcelles de terres, les propriétés acquises par les colons dans les territoires nouvellement mis en exploitation? »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la résolution, dans un cas particulier, des équations normales auxquelles conduit la méthode des moindres carrés.* Note de M. A. Port. (Extrait.)

« Soit y une fonction de x de la forme

$$y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_i x^i + \ldots + k^m x_m$$

(k_0 n'étant pas nul, ce qui est toujours possible, en ajoutant au besoin une constante à la valeur de y).

» Supposons que l'expérience ait fourni un nombre n de couples de valeurs de y et x (n étant plus grand que $m + 1$)

$$(y_1, x_1), \quad (y_2, x_2), \quad \ldots, \quad (y_i, x_i), \quad \ldots, \quad (y_n, x_n),$$

et que l'on veuille, à l'aide de ces valeurs, calculer les coefficients k_0, k_1, k_2, ... par la méthode des moindres carrés. Dans le cas particulier où les valeurs de x, à savoir x_1, x_2, ..., x_n, varient en progression arithmétique,

c'est-à-dire où l'on a

$$x_1 = u, \qquad x_2 = 2u, \qquad x_3 = 3u, \qquad \ldots, \qquad x_n = nu,$$

le calcul de ces coefficients s'effectue très facilement et très simplement. On aura, en adoptant en partie les notations de Jouffret (voir *Revue d'artillerie*, août 1873 et numéros suivants),

$$\begin{aligned}
k_0 &= L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_m L_m,\\
k_1 &= \frac{1}{u}(L_1 + \beta_2 L_2 + \ldots + \beta_m L_m),\\
k_2 &= \frac{1}{u^2}(L_2 + \ldots + \gamma_m L_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
k_m &= \frac{1}{u^m} L_m.
\end{aligned}$$

» Si nous posons

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + \ldots + y_i + \ldots + y_n &= \Sigma(y_i),\\
y_1 + 2y_2 + \ldots + iy_i + \ldots + ny_n &= \Sigma(iy_i),\\
y_1 + 2^2 y_2 + \ldots + i^2 y_i + \ldots + n^2 y_n &= \Sigma(i^2 y_i),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_1 + 2^\mu y_2 + \ldots + i^\mu y_i + \ldots + n^\mu y_n &= \Sigma(i^\mu y_i),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les valeurs de L_0, L_1, L_2, ... seront données par les égalités

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{\Sigma(y_i)}{n},\\
L_1 &= \frac{\alpha_1 \Sigma(y_i) + \Sigma(iy_i)}{A},\\
L_2 &= \frac{\alpha_2 \Sigma(y_i) + \beta_2 \Sigma(iy_i) + \Sigma(i^2 y_i)}{B},\\
L_3 &= \frac{\alpha_3 \Sigma(y_i) + \beta_3 \Sigma(iy_i) + \gamma_3 \Sigma(i^2 y_i) + \Sigma(i^3 y_i)}{C},\\
L_4 &= \frac{\alpha_4 \Sigma(y_i) + \beta_4 \Sigma(iy_i) + \gamma_4 \Sigma(i^2 y_i) + \delta_4 \Sigma(i^3 y_i) + \Sigma(i^4 y_i)}{D},\\
L_5 &= \frac{\alpha_5 \Sigma(y_i) + \beta_5 \Sigma(iy_i) + \gamma_5 \Sigma(i^2 y_i) + \delta_5 \Sigma(i^3 y_i) + \varepsilon_5 \Sigma(i^4 y_i) + \Sigma(i^5 y_i)}{E},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dans lesquelles les α, β, γ, δ, ε, ... et les A, B, C, D, E, ... sont les fonctions suivantes de n, c'est-à-dire du nombre de couples de valeurs fournies

par l'expérience, ou du nombre des équations de condition qu'il s'agit de résoudre par la méthode des moindres carrés :

$$\alpha_1 = -\frac{n+1}{2},$$
$$\alpha_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2.3},$$
$$\alpha_3 = -\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.2.5},$$
$$\alpha_4 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.5.7},$$
$$\alpha_5 = -\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.2.3.3.7},$$
....;

$$\beta_2 = -(n+1),$$
$$\beta_3 = \frac{6(n+1)^2+3(n+1)+2}{2.5},$$
$$\beta_4 = -\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+5(n+1)}{7},$$
$$\beta_5 = \frac{15(n+1)^4+45(n+1)^3+140(n+1)^2+50(n+1)+24}{2.3.3.7},$$
....;

$$\gamma_3 = -\frac{3(n+1)}{2},$$
$$\gamma_4 = \frac{9(n+1)^2+3(n+1)+5}{7},$$
$$\gamma_5 = -\frac{5(n+1)^3+5(n+1)^2+15(n+1)}{2.3},$$
.................................;

$$\delta_4 = -2(n+1),$$
$$\delta_5 = \frac{20(n+1)^2+5(n+1)+15}{3.3},$$
.............................;

$$\varepsilon_5 = -\frac{5(n+1)}{2},$$
................;

$$A = \frac{(n-1)n(n+1)}{2.2.3},$$
$$B = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.2.3.3.5},$$
$$C = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.2.2.2.5.5.7},$$
$$D = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.2.3.3.5.5.7.7},$$
$$E = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.2.2.2.3.3.3.3.7.7.11},$$
....

» On peut, à l'aide des formules ci-dessus, calculer les valeurs numériques des coefficients α, β, ..., A, B, ..., pour des valeurs de n comprises entre deux nombres donnés, par exemple depuis $n = 6$ jusqu'à $n = 20$, et en former une Table. Dans l'application de la méthode, il ne restera plus à calculer que les $\Sigma(y_i)$, $\Sigma(iy_i)$, ..., ce qui se fera facilement, car il suffira de multiplier respectivement les y_1, y_2, y_3, ..., y_n, d'abord par 1, 1, 1, 1, ...; puis, par 1, 2, 3, ..., n; puis, les produits ainsi obtenus par 1, 2, 3, ..., n, et ainsi de suite, et de faire les sommes de ces divers produits. Ensuite, à l'aide de ces sommes, on calculera, en se servant de la Table, les L_0, L_1, L_2, ..., et enfin, les k_0, k_1, k_2, ... Nous renvoyons, pour plus de détails, au Mémoire déjà cité de Jouffret; nous nous contenterons de dire que, dans le cas particulier qui nous occupe (c'est-à-dire où les valeurs de x croissent en progression arithmétique, x pouvant évidemment être de la forme $a + lu$, a étant une constante et l représentant un des nombres 1, 2, 3, ..., n, auquel cas il faudra faire un changement de variable, en posant $x' = x - a$), l'application de la méthode des moindres carrés devient d'une simplicité extrême, nous oserons dire merveilleuse.... »

CHIMIE. — *Sur la réduction de l'alumine*. Note de M. G.-A. **Faurie**.

« On prend deux parties d'alumine bien pure et finement pulvérisée, on en fait une pâte avec une partie de pétrole ou autre hydrocarbure; cette pâte, bien battue, est additionnée d'une partie d'acide sulfurique. Lorsque la teinte jaune est bien uniforme, la masse bien homogène, et qu'il commence à se dégager de l'acide sulfureux, on verse la pâte dans un cornet de papier et l'on projette le tout dans un creuset chauffé au bon rouge, au-dessus de 800°, de manière à décomposer le pétrole. On laisse éteindre la flamme et refroidir le creuset. On retire le produit compact obtenu, on le pulvérise avec soin et on le mélange avec son poids d'un métal en poudre. Ce mélange est placé dans un creuset en plombagine, bien fermé, et le creuset est porté au blanc, dans un four à vent forcé. De nouveau, alors, on laisse refroidir le creuset et on l'ouvre. Au milieu d'une poudre métallique noire, on trouve des grains d'alliages d'aluminium, plus ou moins riches.

» Ce procédé de réduction de l'alumine s'applique à la silice, à la chaux, à la magnésie, etc. »

M. **Baillet** adresse une Note relative à diverses propositions de Géométrie élémentaire.

La séance est levée à 3 heures trois quarts. J. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 12 septembre 1887.

Du pouvoir amplifiant du microscope; par le Dr Léon Didelot. Paris, F. Savy, 1887; br. in-8°.

Traité clinique des fièvres larvées (fièvres des marais); par le Dr Albert Tartanson. Paris, Félix Alcan, 1887; in-8°. (Présenté par M. Brown-Séquard.)

Mémoires de la Société d'Agriculture, Commerce, Sciences et Arts de la Marne; année 1885-1886. Châlons-sur-Marne, 1887; br. in-8°.

Annales du Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique, t. XIII. *Description des ossements fossiles des environs d'Anvers; par* P.-J. van Beneden. 5e partie, texte et planches. Bruxelles, F. Hayez, 1886; 2 in-f°.

Annales de la Société malacologique de Belgique, T. XXI (4e série, t. I); année 1886. Bruxelles, P. Weissenbruch; in-8°.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, rédigées par J. Bosscha, etc., t. XXII, 1re livraison. Harlem, les héritiers Loosjes, 1887; br. in-8°.

Ouvrages reçus dans la séance du 19 septembre 1887.

Service hydrographique de la Marine, n° 697. — *Océan Indien. Instructions générales. Vents, courants et routes principales de navigation.* Paris, Imprimerie nationale, 1887; in-8°. (Présenté par M. Bouquet de la Grye.)

Recherches sur l'étiologie de la paralysie générale chez l'homme; par le Dr Jules Christian; br. in-8°. (Publications du *Progrès médical.*)

Hallucination; par le Dr Jules Christian. (Extrait du *Dictionnaire encyclopédique des Sciences médicales.*) Paris, G. Masson; br. in-8°.

Suite à mes Notes à propos du choléra; par P.-R. Poujade. Montauban, 1887; br. in-8°.

Hypnotisme. Double conscience et altérations de la personnalité; par le Dr Azam. Paris, J.-B. Baillière et fils, 1887; in-12.

Le caractère dans la santé et dans la maladie; par le Dr Azam. Paris, Félix Alcan, 1887; in-8°.

Bibliographie des Sociétés savantes de la France; par M. Eugène Lefèvre-Pontalis. (Publication du Comité des Travaux historiques et scientifiques.) Paris, Imprimerie nationale, 1887; in-4°.

L'Australie et Salomon, par T. Calderon. Paris, imprimerie des Écoles, 1887; br. in-8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires; 1re année, 15 septembre 1887; 1re livraison, in-f°. Amsterdam, Albert de Lange; Paris, J.-B. Baillière et fils.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique; T. VIII, 4e fasc. Bruxelles, F. Hayez, 1887; br. in-8°.

Contribution à l'étude du système crétacé de la Belgique; par H. Forir. I. *Sur quelques Poissons et Crustacés nouveaux ou peu connus*. Liège, H. Vaillant-Carmanne, 1887; br. in-8°.

Mittheilungen über das Germanium; von Clemens Winkler (*Journal für praktische Chemie*). 1887; br. in-8°.

ERRATA.

(Séance du 12 septembre 1887.)

Note de M. *R. Liouville,* sur une classe d'équations différentielles :

Page 463, ligne 4, *au lieu de* $v = \psi(x, y)$, *lisez* $v = \psi(x, Y)$.